高校新演習 センター・私大対策 数学Ⅱ・B

目　次

STANDARD

第1講 >>> 式と証明

必須事項

1 乗法公式と因数分解

(1)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

因数分解では，整式の展開と逆の操作をする。

2 二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

例　$(x+2)^4={}_4\mathrm{C}_0x^4+{}_4\mathrm{C}_1x^3\cdot2+{}_4\mathrm{C}_2x^2\cdot2^2+{}_4\mathrm{C}_3x\cdot2^3+{}_4\mathrm{C}_42^4$

$\qquad=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

3 整式の除法

整式Aを整式Bで割った商がQ，余りがRのとき

$A=BQ+R$　（RはBよりも次数の低い整式）

が成り立つ。

例　$x^3+x^2+1=(x-1)(x^2+2x+2)+3$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+2 \\
\hline
x-1 & x^3+x^2+1 \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & \phantom{x^3-{}}2x^2 \\
 & \phantom{x^3-{}}\underline{2x^2-2x} \\
 & \phantom{x^3-x^2-{}}2x+1 \\
 & \phantom{x^3-x^2-{}}\underline{2x-2} \\
 & \phantom{x^3-x^2-2x-{}}3
\end{array}$$

4 剰余の定理と因数定理

(1)　剰余の定理

xの整式$f(x)$を1次式$x-a$で割ったときの余りRは，$R=f(a)$である。

なお，1次式$ax+b$（$a\neq0$）で割ったときの余りRは，$R=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$である。

(2)　因数定理

xの整式$f(x)$について，$f(x)$が$x-a$を因数にもつ$\Longleftrightarrow f(x)$が$x-a$で割り切れる$\Longleftrightarrow f(a)=0$

剰余の定理と同じく，$ax+b$（$a\neq0$）を因数にもつ条件は，$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$である。

例　$f(x)=x^3+ax^2+bx+6$を$x-1$で割ると15余り，$x+2$で割り切れるとき，

$x-1$で割ると15余るから，$f(1)=15$

よって，$a+b+7=15$より，$a+b=8$　……①

$x+2$で割り切れるから，$f(-2)=0$

よって，$4a-2b-2=0$より，$2a-b=1$　……②

①，②より，$a=3$，$b=5$

5 分数式の計算

分数式の四則計算は，分数と同様に計算する。

(1) 加法 $\dfrac{B}{A}+\dfrac{C}{A}=\dfrac{B+C}{A}$

(2) 減法 $\dfrac{B}{A}-\dfrac{C}{A}=\dfrac{B-C}{A}$

(3) 乗法 $\dfrac{B}{A}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{BD}{AC}$

(4) 除法 $\dfrac{B}{A}\div\dfrac{D}{C}=\dfrac{B}{A}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{BC}{AD}$

例 $\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{1}{x-2}$

6 恒等式の扱い方

(1) 係数比較法…両辺の同じ次数の項の係数がすべて等しいことに注目する。

(2) 数値代入法…両辺にいくつかの値を代入する。これは必要条件なので，十分条件について確認する。

例 $a(x-1)(x+1)+b(x+2)=x+c$ が x についての恒等式であるとき

左辺$=ax^2-a+bx+2b=ax^2+bx+(-a+2b)$

係数を比較して，$a=0$，$b=1$，$-a+2b=c$

これを解いて，$a=0$，$b=1$，$c=2$

7 等式 $A=B$ の証明

(1) AまたはBの一方を変形して他方が導かれることを示す。

(2) $A-B=0$ となることを示す。

(3) A，Bのそれぞれを変形して，同じ式になることを示す。

8 不等式の証明

(1) 不等式$A>B$ が成り立つことの証明は，差をとって，$A-B>0$ を示すのが原則。

(2) $A>0$，$B>0$ のときは，$A>B \Longleftrightarrow A^2>B^2$ を用いて，平方した式の大小を比較する。

(3) 相加平均と相乗平均の関係を利用する。

9 相加平均と相乗平均の関係

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab} \Longleftrightarrow a+b\geqq2\sqrt{ab}$ （等号成立は $a=b$ のとき）

例 $x>0$ のとき，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{x}\geqq k$ を満たす k の最大値は，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{x}\geqq2\sqrt{\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{9}{x}}=3$ より，$k=3$

等号が成立するのは，$\dfrac{x}{4}=\dfrac{9}{x}$

すなわち，$x=6$ のときである。

例題1

(1)　$(x+2)^3-2(x+2)^2-8(x+2)$ を計算せよ。

(2)　$(x+3)^4$ を展開したときの，x^3 と x^2 の項の係数を求めよ。

解答

(1)　与式 $=x^3+6x^2+12x+8-2(x^2+4x+4)-8x-16=x^3+4x^2-4x-16$

(2)　$(x+3)^4$ の展開式の一般項は，${}_4\mathrm{C}_r x^{4-r}\cdot 3^r$

$4-r=3$　すなわち，$r=1$ のとき，x^3 の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_1\cdot 3=12$

$4-r=2$　すなわち，$r=2$ のとき，x^2 の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_2\cdot 3^2=54$

ヒント

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(x+a)^n$ の展開式の一般項は，${}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}a^r$

例題2

$4x^3+mx^2+2x+n$ が $2x^2+x+3$ で割り切れるとき，m，n の値を求めよ。

解答

$4x^3+mx^2+2x+n$ を

$2x^2+x+3$ で割った余りは

$\left(-\frac{m}{2}-3\right)x+n-\frac{3}{2}m+3$

余りが 0 になるから

$-\frac{m}{2}-3=0$，$n-\frac{3}{2}m+3=0$

これを解いて，$m=-6$，$n=-12$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+\left(\frac{m}{2}-1\right) \\ \hline
2x^2+x+3 & 4x^3+mx^2+2x+n \\
 & 4x^3+2x^2+6x \\ \cline{2-2}
 & (m-2)x^2-4x+n \\
 & (m-2)x^2+\left(\frac{m}{2}-1\right)x+\left(\frac{3}{2}m-3\right) \\ \cline{2-2}
 & \left(-\frac{m}{2}-3\right)x+n-\frac{3}{2}m+3
\end{array}$$

割り切れる $\Longleftrightarrow$ 余り $=0$

例題3

x の整式 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ を $x-1$，$x+3$ で割ったときの余りがそれぞれ -7，-55 であり，$x-2$ で割ると割り切れる。このとき，a，b，c の値を求めよ。また，$f(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの余りを求めよ。

解答

$f(x)$ を $x-1$ で割った余りが -7 であるから，$f(1)=3+a+b+c=-7$

$a+b+c=-10$　……①

$f(x)$ を $x+3$ で割った余りが -55 であるから，$f(-3)=-81+9a-3b+c=-55$

$9a-3b+c=26$　……②

$f(x)$ は $x-2$ で割り切れるから，$f(2)=24+4a+2b+c=0$

$4a+2b+c=-24$　……③

①，②，③を連立して解くと，$a=-1$，$b=-11$，$c=2$

$f(x)$ を $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ で割ったときの商を $g(x)$，余りを $mx+n$ とおくと

$f(x)=(x-1)(x+3)g(x)+mx+n$

$x=1$ を代入して，$m+n=-7$

$x=-3$ を代入して，$-3m+n=-55$

これを解いて，$m=12$，$n=-19$

よって，余りは $12x-19$

剰余の定理
$f(x)$ を $x-a$ で割った余りは，$f(a)$

因数定理
$f(x)$ が $x-a$ で割り切れる $\Longleftrightarrow f(a)=0$

ヒント

例題4

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a^3-2a^2+4a}{a^2-2a+1}\div\dfrac{2a^2-3a-2}{2a^2-3a+1}\times\dfrac{a^2-4}{a^3+8}$

(2) $\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}-\dfrac{x^2-x-5}{x+2}-\dfrac{3x^2-4x-5}{x-2}+\dfrac{2x^2-8x+5}{x-3}$

解答

(1) 与式$=\dfrac{a(a^2-2a+4)}{(a-1)^2}\times\dfrac{(2a-1)(a-1)}{(2a+1)(a-2)}\times\dfrac{(a+2)(a-2)}{(a+2)(a^2-2a+4)}=\dfrac{a(2a-1)}{(a-1)(2a+1)}$

(2) 与式$=\left(2x+1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(x-3+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(3x+2-\dfrac{1}{x-2}\right)+\left(2x-2-\dfrac{1}{x-3}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{-8x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$

⇔ 各分数式の分子や分母を因数分解してから約分する。

⇔ 分子の次数を下げてから計算する。

例題5

$a+2b=3$ のとき，$a^2+4b^2=3a+6b-4ab$ が成り立つことを証明せよ。

解答

$a+2b=3$ より，$a=-2b+3$　これを両辺に代入すると

左辺$=4b^2-12b+9+4b^2=8b^2-12b+9$

右辺$=-6b+9+6b+8b^2-12b=8b^2-12b+9$

よって，$a^2+4b^2=3a+6b-4ab$ は成り立つ。

⇔ 左辺と右辺をそれぞれ変形して，両辺が同じ式になることを示す。

例題6

$x^3=a+bx+cx(x+1)+dx(x-1)(x+2)$ が x についての恒等式となるように，a，b，c，d の値を定めよ。

解答

右辺を展開して整理すると，$x^3=a+bx+cx^2+cx+dx^3+dx^2-2dx$

$=dx^3+(c+d)x^2+(b+c-2d)x+a$

係数を比較して，$d=1$，$c+d=0$，$b+c-2d=0$，$a=0$

よって，$a=0$，$b=3$，$c=-1$，$d=1$

⇔ 右辺を展開して，同じ次数の項の係数を比較する。

例題7

a，b を正の数とするとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$ が成り立つことを示せ。

解答

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=4$

よって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 4+5=9$

$\left(\text{等号が成立するのは，} ab=\dfrac{4}{ab} \text{ かつ } ab>0 \text{ より，} ab=2 \text{ のときである。}\right)$

⇔ $a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ となるから，相加平均と相乗平均の関係を用いる。

基 本 問 題 演 習

1 $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{8}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$ のとき，$x^3-y^3=\boxed{\text{アイウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

2 p，q，r を実数とし，x についての整式 A，B を

$$A=x^3+px^2+qx+r, \qquad B=x^2-3x+2$$

とする。

(1) A を B で割ったときの商が $x-1$ であった。このとき，$p=\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) A を B で割ったときの余りは x で割り切れた。このとき，$r=\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) A を B で割ったとき，その商と余りが等しくなった。このとき，$q+r=\boxed{\text{オ}}$ である。

3 整式 x^4-4x+5 を整式 $x^2-\boxed{\text{ア}}\,x+2$ で割ると，商が $x^2+3x+\boxed{\text{イ}}$，余りが $11x-9$ となった。

4 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 5 余り，$x-1$ で割ると 3 余る。
このとき，$P(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}$ である。

5 $x^7-\boxed{\text{ア}}\,x^4-\boxed{\text{イウ}}\,x-18$ は，x^2-x-2 で割り切れる。

6 aを実数とし，xの整式A，Bを，$A=x^3+5x^2+a^2x+a^2-6a+20$，$B=x^3+(a^2+5)x+a^2-6a+30$とする。このとき，$A-B=5(x+\boxed{\text{ア}})(x-\boxed{\text{イ}})$である。

(1) $P=x+\boxed{\text{ア}}$とし，AがPで割り切れるとする。このとき，$a=\boxed{\text{ウ}}$，$A=(x^2+4x+\boxed{\text{エオ}})P$である。さらに，$B=(x^2-x+\boxed{\text{カキ}})P$であり，$A$，$B$はともに$P$で割り切れる。

(2) $Q=x-\boxed{\text{イ}}$とすると，AをQで割った余りRは$R=\boxed{\text{ク}}(a-1)^2+45$となる。よって，$A$は$Q$で$\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{ケ}}$にあてはまるものを，次の⓪～①から選べ。

⓪ 割り切れる　　① 割り切れない

7 a，bは実数で，$P(x)$と$Q(x)$はそれぞれ2次と3次の整式であるとする。$Q(x)$は$P(x)$で割り切れて，商が$x+a$であるとする。このとき

$$Q(x)=(x+\boxed{\text{ア}})P(x)$$

が成り立つ。さらに，$\{P(x)\}^2$を$Q(x)$で割ったとき，商が$x+b$，余りが$P(x)$であるとする。このとき

$$\{P(x)\}^2=(x+\boxed{\text{イ}})Q(x)+P(x)$$

が成り立つ。上の2つの等式から

$$\{P(x)\}^2=\{(x+\boxed{\text{ア}})(x+\boxed{\text{イ}})+\boxed{\text{ウ}}\}P(x)$$

となる。したがって

$$P(x)=x^2+(a+\boxed{\text{エ}})x+\boxed{\text{オ}}b+\boxed{\text{カ}}$$

である。

8 aを実数とし，次数が3以下の整式$P(x)$は

$$P(1)=0,\quad P(2)=a,\quad P(3)=2,\quad P(4)=6$$

を満たすとする。$P(1)=0$であるので，因数定理から，$P(x)$は$x-\boxed{\text{ア}}$で割り切れ，次数が2以下の整式$Q(x)$で

$$P(x)=(x-\boxed{\text{ア}})Q(x)$$

を満たすものがある。$Q(x)$を求めるために

$$Q(x)=r(x-2)(x-3)+s(x-2)+t$$

とおいて，定数r，s，tをaを用いて表してみよう。$P(2)=a$から$t=\boxed{\text{イ}}$となり，次に，$P(3)=2$から$s=\boxed{\text{ウエ}}+\boxed{\text{オ}}$となる。さらに，$P(4)=6$から$r=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$となる。したがって，$Q(x)$は

$$\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\{\boxed{\text{カ}}x^2+(\boxed{\text{クケ}}a+\boxed{\text{コ}})x+\boxed{\text{サシ}}a-\boxed{\text{ス}}\}$$

である。

9 $\dfrac{5x}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{x-\boxed{\text{イ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{x+\boxed{\text{エ}}}$ と変形できるから

$$\frac{5x}{(x-2)(x+3)}+\frac{x-\boxed{\text{オ}}}{x^2-x-2}=\frac{\boxed{\text{カ}}(x+\boxed{\text{キ}})}{(x+3)(x+1)}$$

となる。

10 すべての実数 x に対して

$$(ax+1)(3x-2)(x-b)=6x^3+cx^2+x+d$$

が成り立つとき

$a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウエオ}}$, $d=\boxed{\text{カ}}$

である。

11 $\dfrac{x^2-2x+6}{(x^2+x+1)(2x-1)}=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}+\dfrac{c}{2x-1}$ が x についての恒等式であるとき

$a=\boxed{\text{アイ}}$, $b=\boxed{\text{ウエ}}$, $c=\boxed{\text{オ}}$

である。

12 $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-10x+21}+\dfrac{x+1}{x-4}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エ}}}{(x-\boxed{\text{オ}})(x-4)}$ である。

13 $x+4y=y-3x\neq 0$ のとき, $\dfrac{2x^2-xy-y^2}{2x^2+xy+y^2}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

14 $5x-y-2z=0$ および $10x-3y-z=5$ を満たす x, y, z のすべての値に対して

$$ax^2+by+2cz^2+14=0$$

が成り立つ。ただし, a, b, c は定数である。このとき

$a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウエ}}$

である。

15 自然数 x，y，z が $2x+9y-7z=0$，$3x-4y+2z=0$ を満たしているとき

$x:y:z=\boxed{\text{ア}}:\boxed{\text{イ}}:\boxed{\text{ウ}}$

である。

また，$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$ のとりうる値のうち，最小の自然数は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

16 (1) いかなる実数 a に対しても，$a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つとき，実数 b の値は，$b=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) いかなる整数 a に対しても，$a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つような整数 b の値は $\boxed{\text{イ}}$ 個あり，b の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

17 任意の実数 a，b に対して，つねに不等式 $a^2+b^2+(1-a-b)^2 \geqq k$ が成り立つとき，定数 k の値の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

で，このとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で等号は成り立つ。

18 任意の正の数 x について，つねに次の不等式が成り立つ。

$x+\dfrac{1}{x} \geqq \boxed{\text{ア}}$ （等号が成り立つのは，$x=\boxed{\text{イ}}$ のとき）

$x+\dfrac{4}{x} \geqq \boxed{\text{ウ}}$ （等号が成り立つのは，$x=\boxed{\text{エ}}$ のとき）

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right) \geqq \boxed{\text{オ}}$ （等号が成り立つのは，$x=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のとき）

19 条件 $x>0$，$y>0$ のもとで，つねに $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{9y}{x}\right) \geqq k$ が成り立つとき，定数 k の最大値は $\boxed{\text{アイ}}$ で，このとき，$x=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,y$ で等号は成り立つ。

応用問題演習

STEP 1

1 $(2x-\sqrt{3})^3=px^3+qx^2+rx+s$ とおくとき，$pr-qs$ の値は $\boxed{(ア)}$ で，$\sqrt{3}(3p+r)+(3q+s)$ の値は $\boxed{(イ)}$ である。

〈立命館大〉

2 次の問いに答えよ。

(1) $(2x^3+x^2+1)^3$ を x^2-x+1 で割ったときの余りは，$\boxed{(ア)}x-\boxed{(イ)}$ である。 〈中部大〉

(2) $\alpha=3-2\sqrt{2}$ のとき，$2\alpha^4-8\alpha^3-21\alpha^2-\alpha+2$ の値は $\boxed{(ウ)}$ である。 〈法政大〉

3 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると，商が $Q(x)$ で余りが -1 になる。その商 $Q(x)$ をまた $x-2$ で割ると，商が x^2+4 で余りが 3 となる。$P(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ。 〈神奈川大〉

4 次の問いに答えよ。

(1) $x+y+z=2$，$x-y-3z=0$ を満たす x，y，z の任意の値に対して，常に $\alpha(x-2)^2=\beta(y-2)^2+\gamma(z-2)^2-15$ が成立する。このとき，α，β，γ の値を求めよ。 〈青山学院大〉

(2) $2x-3y+z=4$ および $3x-2y-z=1$ を同時に満たすすべての実数 x，y，z について

$$ax^2+by^2+cz^2=yz+zx+xy$$

が成り立つとき，定数 a，b，c の値を求めよ。 〈広島文教女子大〉

5 $A(x)$ は定数項が 1 である x の 3 次式で，ある定数 c が存在して，すべての x に対して，$A(2x+1)=cA(x)$ が成立している。このとき，c の値と $A(x)$ を求めよ。 〈上智大〉

6 実数 x，y，z が，$(x+y-z)^2+(y+z-x)^2+(z+x-y)^2=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。 〈阪南大〉

(1) $x+y+z=k$ とおいて，$x^2+y^2+z^2$，$xy+yz+zx$ をそれぞれ k の式で表せ。

(2) $|x+y+z|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

7 $a+b=c+d$，$a+c=b+d$，$a+d=b+c$ のいずれかが成り立つとき，次の等式を証明せよ。

$$4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=8abcd$$

〈東北学院大〉

8 どの 2 つも等しくない 4 つの正の数 a，b，c，d が

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{c}+\sqrt{d},\quad a+b=c+d,\quad a<b,\quad c<d$$

を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。 〈法政大〉

(1) $ab<cd$

(2) $b-a>d-c$

9 $0<a\leqq x\leqq y\leqq b$ であるとき，次の問いに答えよ。 〈中央大〉

(1) 不等式 $1\leqq\dfrac{y}{x}\leqq\dfrac{b}{a}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $X=\dfrac{y}{x}$，$Y=\dfrac{b}{a}$ とおき，(1)を利用して次の不等式を証明せよ。

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leqq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

10 実数 x の関数を $y=x^4+2x^3+x^2+3$，$z=x^2+x+1$ とするとき，z は $x=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ をとる。ここで，y を z の関数として表すと $y=\boxed{\text{カ}}z^2-\boxed{\text{キ}}z+\boxed{\text{ク}}$ となることから，y の最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，最小値を与える x の値は小さい順に $x=\boxed{\text{コサ}}$ または $x=\boxed{\text{シ}}$ である。また $\dfrac{y}{z}$ の最小値は $\boxed{\text{ス}}$ となる。〈青山学院大〉

STEP 2

1 $a+b+c\neq 0$，$abc\neq 0$ を満たす実数 a，b，c が，(A) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ を満たしている。このとき，任意の奇数 n に対し，(B) $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$ が成立することを示せ。 〈早稲田大〉