高校新演習 センター・私大対策 数学Ⅰ・A

目　次

第1講 >>> 数と式

必須事項

1 指数法則

m，n が正の整数のとき

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$　　(2) $(a^m)^n = a^{mn}$　　(3) $(ab)^n = a^n b^n$

2 乗法公式

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(4) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

3 因数分解の公式

整式の展開と逆の操作をする。

(1) $ma + mb = m(a+b)$　　$ma - mb = m(a-b)$

(2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$　　$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

(3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(4) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

(5) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

●因数分解の手順

共通因数がないか ⟶ 公式が使えないか ⟶ 次数のいちばん低い文字に着目して整理する ⟶ いくつかの項をまとめて公式が使えないか

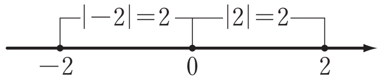
4 有理数，無理数，実数

実　数
- 有理数
  - 整数
  - 有限小数
  - 循環小数
- 無理数…循環しない無限小数

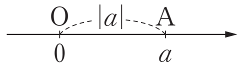
（循環小数・無理数：無限小数）

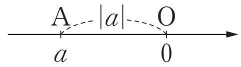
5 絶対値

(1)　数直線上で，原点O(0)と点A(a)との距離を a の絶対値といい，$|a|$で表す。



$a>0$のとき　　$a<0$のとき





(2)　$|a|=|-a|$が成り立つ。

(3)　$\begin{cases} a \geqq 0 \quad のとき，|a|=a \\ a<0 \quad のとき，|a|=-a \end{cases}$

(4)　数直線上で，点A(a)と点B(b)との距離は，AB$=|b-a|$である。

(5)　$\sqrt{a^2}=|a|$

6 平方根の性質

(1)　$a \geqq 0$ のとき　$(\sqrt{a})^2=a$

(2)　$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a \quad (a \geqq 0) \\ -a \quad (a<0) \end{cases}$

(3)　$a>0$，$b>0$ のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(4)　$a>0$，$m>0$ のとき

$$\sqrt{m^2a}=m\sqrt{a}$$

(5)　分母の有理化

分母に根号を含む分数は，次のようにして，分母から根号をなくすことができる。

$$\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3\cdot3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

7 整数部分・小数部分

次のタイプに慣れておく。

例　$5-\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{b}-2a$ の値を求める。

$a=3$，$b=2-\sqrt{3}$ であるから，$\dfrac{1}{b}-2a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-6=2+\sqrt{3}-6=\sqrt{3}-4$

例題1

$A=-2x^2-2xy+3y+3$，$B=y^2-8xy-6x+9y-4$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $X=B-2A$ を満たす整式 X を求めよ。

(2) X を因数分解せよ。

解答

(1) $X=B-2A=y^2-8xy-6x+9y-4-2(-2x^2-2xy+3y+3)$
$\quad=4x^2-4xy+y^2-6x+3y-10$

(2) $X=(2x-y)^2-3(2x-y)-10$
$\quad=(2x-y-5)(2x-y+2)$

例題2

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2+ab-3bc-9c^2$

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

解答

(1) $a^2+ab-3bc-9c^2=(a+3c)(a-3c)+b(a-3c)$
$\quad=(a-3c)(a+b+3c)$

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$
$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$
$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

例題3

$P=|a+2|+|a-2|$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 絶対値記号を使わずに P を表せ。

(2) $P=6$ となるときの a の値を求めよ。

解答

(1) $|a+2|$ は，$a\geqq-2$ のとき，$a+2$，$a<-2$ のとき，$-a-2$
$|a-2|$ は，$a\geqq2$ のとき，$a-2$，$a<2$ のとき，$-a+2$
したがって，$P=\begin{cases}2a\ (a\geqq2)\\4\ (-2\leqq a<2)\\-2a\ (a<-2)\end{cases}$

(2) $a<-2$ のとき，$-2a=6$ より，$a=-3$
$-2\leqq a<2$ のとき，$P=6$ とはならない。
$a\geqq2$ のとき，$2a=6$ より，$a=3$
したがって，$P=6$ となる a の値は，-3，3

ヒント

たすきがけの方法を用いる。

次数の小さい文字でくくる。

$|x|=\begin{cases}x\geqq0 \text{ のとき } & x\\x<0 \text{ のとき } & -x\end{cases}$

例題4

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，x^2+y^2，x^4+y^4 の値を求めよ。

解答

$$x+y=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=2\sqrt{3}$$

$$xy=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$$

であるから

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\times1=10$$

$$\begin{aligned}x^4+y^4&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2\\&=10^2-2\times1=98\end{aligned}$$

ヒント $x+y$ と xy を用いて表す。

例題5

無理数 $p=a+b\sqrt{3}$ (a , b は整数)が，$p(1+\sqrt{3})-\dfrac{p}{2+\sqrt{3}}=11$ を満たすとき，a と b の値を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=p(1+\sqrt{3})-\frac{p(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=p\{1+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\}\\&=(a+b\sqrt{3})(-1+2\sqrt{3})\\&=(6b-a)+(2a-b)\sqrt{3}=11\end{aligned}$$

であるから，$6b-a=11$，$2a-b=0$

これを解いて，$a=1$，$b=2$

ヒント a，b，c，d が有理数，$\sqrt{m}$ が無理数のとき
$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$
$\Longleftrightarrow a=c$，$b=d$

例題6

$\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}$ の小数部分を m とするとき，m，$m+\dfrac{1}{m}$ の値を求めよ。

解答

$\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{6(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=3-\sqrt{3}$ で

$1<3-\sqrt{3}<2$

したがって，$m=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$

よって，$m+\dfrac{1}{m}=2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=4$

ヒント $n<m<n+1$ (n は負でない整数)のとき，m の整数部分は n，m の小数部分は $m-n$ である。

基本問題演習

1 a，b を定数とし，x についての整式

$A=x^3+(a+1)x^2-(5a^2-3)x+7a-1$

$B=x^2-2ax-a+1$

$C=x+b$

を考える。

整式 $A-BC$ を展開して x について整理するとき

x^2 の係数を p，x の係数を q，定数項を r

とする。このとき $p=\boxed{\text{ア}}a-b+\boxed{\text{イ}}$ である。

ここで，$p=0$ であるとする。

このとき，x の係数 q は

$q=a^2+\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}=(a+\boxed{\text{オ}})(a+\boxed{\text{カ}})$

となる。ただし，$\boxed{\text{オ}}<\boxed{\text{カ}}$ である。

また，定数項 r は

$r=\boxed{\text{キ}}a^2+\boxed{\text{ク}}a-\boxed{\text{ケ}}=(\boxed{\text{コ}}a-\boxed{\text{サ}})(a+\boxed{\text{シ}})$

となる。

さらに，$p=0$，$q=0$，$r=0$ ならば

$a=\boxed{\text{スセ}}$，$b=\boxed{\text{ソタ}}$

である。このとき，整式 A は

$A=(x+\boxed{\text{チ}})(x+\boxed{\text{ツ}})(x-\boxed{\text{テ}})$

となる。ただし，$\boxed{\text{チ}}<\boxed{\text{ツ}}$ である。

2 整式 $A=6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$ を因数分解すると

$A=(\boxed{\text{ア}}x+y+\boxed{\text{イ}})(\boxed{\text{ウ}}x+y-\boxed{\text{エ}})$

となる。

$x=-1$，$y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のとき，A の値は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

3 $P=x(x+3)(2x-3)$ とする。また，a を定数とする。

(1) $x=a+1$ のときの P の値は $2a^3+\boxed{\text{ア}}a^2+\boxed{\text{イ}}a-\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $x=a+1$ のときの P の値と，$x=a$ のときの P の値が等しいとする。このとき，a は

$3a^2+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}=0$

を満たす。したがって $a=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

とくに，$x=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}-\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}+1$ のときの P の値と

$x=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}-\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$

のときの P の値は等しく，その値は，$\boxed{\text{サ}}+\dfrac{\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

4 (1) $a=3+2\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a}=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}},\quad \frac{1}{b}=\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2) n を自然数とし，$A=n^4-2n^3+3n^2-2n+2$ とおく。

$$n^4+3n^2+2=(n^2+\boxed{\text{コ}})(n^2+\boxed{\text{サ}})$$

であるから

$$A=(n^2+\boxed{\text{シ}})(n^2-\boxed{\text{ス}}n+\boxed{\text{セ}})$$

となる。ただし，$\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{サ}}$ である。

さらに

$$n^2-\boxed{\text{ス}}n+\boxed{\text{セ}}=(n-\boxed{\text{ソ}})^2+\boxed{\text{タ}}$$

である。

したがって，$A<1000$ を満たす最大の n は $\boxed{\text{チ}}$ であり，このときの A の素因数分解は

$$A=\boxed{\text{ツ}}\times\boxed{\text{テト}}\times\boxed{\text{ナニ}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{テト}}<\boxed{\text{ナニ}}$ である。

5 整式 $A=\sqrt{2}xy-2\sqrt{5}x+2\sqrt{5}y-10\sqrt{2}$ を考える。

$$A=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}(x+\sqrt{\boxed{\text{イウ}}})(y-\sqrt{\boxed{\text{エオ}}})$$

である。

$x=3$，$y=4$ のとき

$$\frac{1}{A}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

6 $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，$B=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。

このとき

$$AB=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-\boxed{\text{ア}}}=\frac{\sqrt{6}-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり，また

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$$

である。以上により

$$A+B=\frac{\boxed{\text{カ}}-\sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

7 m, n を自然数とし, $1<m<n$ とする。

$$\alpha=\sqrt{m}-\sqrt{m-1},\ \beta=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

とおく。さらに

$$S=\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}$$

とおく。

(1) $m=3$, $n=6$ のとき

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}},\ \beta+\frac{1}{\beta}=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$$

であり, $S=\boxed{オカ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。

(2) $S=8\sqrt{3}$ ならば, $mn=\boxed{クケ}$ である。このとき

$m=\boxed{コ}$, $n=\boxed{サ}$

または

$m=\boxed{シ}$, $n=\boxed{ス}$

である。ただし, $\boxed{コ}<\boxed{シ}$ とする。

(3) 等式

$$\alpha^2\beta^2+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=500$$

が成り立つのは, $m=\boxed{セ}$, $n=\boxed{ソタ}$ のときである。

8 2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の解が α, β で, $\alpha>\beta$ とするとき

$$\alpha=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イウ}}}{2},\ \beta=\frac{\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{2}$$

である。また

$m<\alpha<m+1$ を満たす整数 m の値は, $m=\boxed{エ}$

$n<\beta<n+1$ を満たす整数 n の値は, $n=\boxed{オカ}$

である。

次に, $\alpha^2-1=\boxed{キ}\alpha$ であるから

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}=\boxed{キ}$$

となり

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\boxed{クケ}}$$

である。さらに, $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\boxed{コサ}$ である。

9 $\alpha=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。α の分母を有理化すると, $\alpha=\dfrac{\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ となる。

2 次方程式 $6x^2-7x+1=0$ の解は, $x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$, $\boxed{キ}$ である。

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{ク}$ である。

⓪ $\dfrac{\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$　① $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}$　② $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$　③ $\boxed{キ}$

10 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ の分母を有理化すると $\dfrac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。次の⓪〜②のうちから最小であるものを選ぶと $\boxed{\text{エ}}$ であり，最大であるものを選ぶと $\boxed{\text{オ}}$ である。

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

(2) 次の⓪〜③のうちから最小であるものを選ぶと $\boxed{\text{カ}}$ であり，最大であるものを選ぶと $\boxed{\text{キ}}$ である。

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　① $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　　③ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

11 次のような装置がある。$x>1$ を満たす数 x が書かれた紙をこの装置に入れると，装置は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を求め，以下のように作動する。

- $x>n$ のとき，n 個の玉と数 $\dfrac{1}{x-n}$ が書かれた紙を出す
- $x=n$ のとき，n 個の玉を出し，紙は出さない

(1) $\dfrac{27}{8}$ が書かれた紙をこの装置に入れて，出てきた紙をまた装置に入れることを，紙が出てくる限り繰り返す。

$3 \leqq \dfrac{27}{8} < 4$ であるから，1 回目には 3 個の玉と $\dfrac{8}{3}$ が書かれた紙が出てくる。

次に $\dfrac{8}{3}$ が書かれた紙を入れるので，2 回目には $\boxed{\text{ア}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

(2) $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ が書かれた紙をこの装置に入れて，出てきた紙をまた装置に入れることを，紙が出てくる限り繰り返す。

1 回目には $\boxed{\text{エ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{オ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{カ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

2 回目には $\boxed{\text{キ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{ク}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{ケ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

3 回目には $\boxed{\text{コ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{サ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{シ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

また，11回目には $\boxed{\text{ス}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{セ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{ソ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

応用問題演習

STEP 1

1 x についての整式 A, B が $2A+B=4x^3+7x^2+4x-1$, $A-B=-x^3-4x^2+5x+1$ を満たすとき，2つの整式 A, B を求めよ。 〈福井工業大〉

2 $(x+1)(x-1)(2x+3)(3x-1)$ を展開せよ。 〈中央大〉

3 $(4x^3-3x^2+2x-1)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}+1\right)$ を展開したとき，定数項を求めよ。 〈佛教大〉

4 $6x^2-xy-2y^2-7x+7y-3$ を因数分解すると $\boxed{(ア)}$ である。また，$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ を展開すると $\boxed{(イ)}$ である。 〈京都産業大〉

5 次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2+2abc$ 〈旭川大〉

(2) x^4+3x^2+4 〈名古屋経済大〉

6 $a<0$ のとき，$\sqrt{a^2}-2\sqrt{a^2-2a+1}$ を整理せよ。 〈桃山学院大〉

7 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+3}$ を計算せよ。

また，$\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-3}$ を計算せよ。 〈京都産業大〉

8 $x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，x^2+xy+y^2，$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ の値を求めよ。 〈名城大〉

9 $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ の小数部分を a とするならば，$a=\sqrt{\boxed{\text{(ア)}}}-\boxed{\text{(イ)}}$ であり，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(a+2)^2}=\boxed{\text{(ウ)}}$ である。 〈名城大〉

10 $x=\sqrt{3\sqrt{2}+4}$，$y=\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ のとき，$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ。 〈岩手大〉

STEP 2

1 $x+y+z=4$，$xy+yz+zx=2$，$xyz=5$ のとき，$x^2+y^2+z^2$，$x^4+y^4+z^4$ の値をそれぞれ求めよ。 〈武庫川女子大〉

2 $x=\sqrt{6-\sqrt{35}}$，$y=\sqrt{4+\sqrt{15}}$ とするとき，$x+y$，$\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2$ の値を求めよ。 〈北海道薬科大〉